فهرست مطالب

اعداد صحیح مثبتی باشند و $f(n_1) = f(n_2)$. اگر $f(n_1) = f(n_2) > 0$ باشد، آنگاه n_1 و n_2 هر دو بایستی زوج باشند، در نتیجه معادله‌ی $f(n_1) = f(n_2)$ طبق ضابطه $\frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2}$ را به دست می‌دهد. لذا $n_1 = n_2$. به طور مشابه اگر $f(n_1) = f(n_2) \leq 0$، آنگاه n_1 و n_2 هر دو فرد خواهند بود که در

به استقرا ثابت می‌کنیم که برای هر $n \geq 1$، اگر A یک زیرمجموعه‌ی n عضوی از $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $\exists c \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in A \ \ (f(x) = c)$.

پایه‌ی استقرا: $n = 1$. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ یک زیرمجموعه‌ی ۱ عضوی از $\mathbb{R}$ باشد. در نتیجه $A = \{a\}$ برای برخی $a \in \mathbb{R}$. قرار می‌دهیم $c = f(a)$. در نتیجه واضح است که $\forall x \in A \ (f(x) = c)$.

فرض استقرا: فرض کنید $n \geq 1$ و به ازای هر $A \subseteq \mathbb{R}$، اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، آنگاه $\exists c \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in A \ \ (f(x) = c)$. حال فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{R}$ و A یک مجموعه‌ی $n + 1$ عضوی باشد. فرض کنیم a_1 عضوی دلخواه از A باشد و قرار می‌دهیم $A_1 = A \setminus \{a_1\}$ حال A_1 دارای n عضو است و لذا بنا بر فرض استقرا $c_1 \in \mathbb{R}$ چنان موجود است که $\forall x \in A_1 \ (f(x) = c_1)$. اگر بتوانیم نشان دهیم $f(a_1) = c_1$ آنگاه اثبات تمام خواهد شد.

فرض کنید a_2 عضوی از A باشد که با a_1 برابر نیست و قرار می‌دهیم $A_2 = A \setminus \{a_2\}$. با اعمال کردن مجدد فرض استقرا می‌توان گفت $c_2 \in \mathbb{R}$ چنان موجود است به طوری که $\forall x \in A_2 \ (f(x) = c_2)$. حال با توجه به این که $a_1 \neq a_2$ و $a_2 \in A_2$، در نتیجه $f(a_1) = c_2$. حال a_3 را عضوی از A مخالف با a_1 و a_2 انتخاب می‌کنیم؛ در نتیجه $a_3 \in A_1$ و $a_3 \in A_2$. بنابراین $f(a_3) = c_1$ و $f(a_3) = c_2$. در نتیجه $c_1 = c_2$ و $f(a_1) = c_1$.