فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی

شماره ۵۹(پاییز و زمستان ۱۳۵۹) صص. ۷ تا ۲۷

سیر تاریخی فلسفهء ریاضیات*

سیاوش شهشهانی

چکیده

چکیده. در این مقاله، تاریخ فلسفه ریاضی را در سه دوره مورد مطالعه قرار می‌دهیم. دورهٔ اول، از ادوار باستانی تا اواخر قرن هفدهم میلادی؛ دوره دوم که با ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن و لایب‌نیتس آغاز می‌شود و حدودا دو قرن به درازا می‌کشد؛ و دوره سوم، از زمان دقیق‌سازی مبانی آنالیز ریاضی توسط وایرشتراس و دیگران تا به امروز. همچنین سه مکتب فلسفی منطق‌گرایی، صورتگرایی و شهودگرایی در ریاضیات را نقد و نقاط ضعف و قوت آنها را بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که این سه مکتب غالب در فلسفه ریاضی، هر یک با روی گردانیدن از تجربه عینی ریاضی کاران، به مقوله‌ای مستقل از ریاضیات تبدیل شده است که جوابگوی کنجکاوی‌های فلسفی ریاضیدانان حرفه‌ای نیست.

۱. سرآغاز

«... روش توصیف تاریخی ... روش محبوب سخنرانان وحشت‌زده است که محدودیت‌های آن را حربه‌ای برای مهار کردن لفاظی حرص آلود خود می یابند.»[1] اما بی شک اگر بررسی تاریخی کمکی به کاهش لفاظی باشد باید از آن بهره جست. ولی مطالعه فلسفه ریاضیات دلایل مثبت تری نیز برای به کار گرفتن بررسی تاریخی وجود دارد. یکی از مضمون هایی که سعی خواهم کرد در این سخنرانی بپرورانم

عبارات و کلمات کلیدی. فلسفه ریاضی، صورتگرایی، منطق‌گرایی، شهودگرایی، استدلال در ریاضیات.

*این مقاله بر اساس یک سخنرانی در ((سمینار فلسفه، منطق و روش شناسی ریاضی)) که در اردیبهشت ماه سال ۱۳۹۵ ایراد شده، تهیه شده است. این مقاله را بیش از ۳۵ سال پیش نوشته ام و اکنون نسبت به برخی مطالب آن نظری متفاوت دارم. با این حال بهتر دیدم فقط به تصحیح کوچک، اکثرا چاپی، اکتفا کنم (نگارنده).

[1] داستا یوفسکی در رمان **برادران کارامازوف**، کتاب دوازدهم، بخش نهم.

© ۱۳۹۵ (انجمن ریاضی ایران)

، ارتباط مستقیم تمایل های فلسفی در هر دوره از تاریخ ریاضیات با چهره واقعیت ریاضیات آن دوره است. خواهیم دید که گرایش های متداول یک دوره، هر چند که از دید معاصران طبیعی و بدیهی به نظر برسد، ممکن است عکس العمل یا طغیانی بیش نبوده باشد. به عکس، به آنچه که امروز در نظر ما نوعی جزمی گرامی در بعضی دوره های تاریخ ریاضیات به نظر می رسد، ممکن است در زمان خود، نقشی مهم در حفظ یکپارچگی و بقای این علم دارا بوده باشد. به طور کلی، فلسفه ریاضیات مشتمل بر مقوله های وجود [۱] (هستی شناسی)، معرفت [۲] (شناخت‌شناسی)، و روش شناسی [۳] است. مقوله «وجود» در فلسفه ریاضی، به بررسی اشیا (مفاهیم) ریاضی و نحوه ی وجود آنها اختصاص دارد. در مقوله های معرفت و روش شناسی، مسایلی از قبیل ماهیت اثبات ریاضی ، منشا اعتقاد ما به قضیه های ریاضی و فرآیند رشد نظریه های ریاضی مورد گفتگو قرار می گیرد. البته این مقوله ها از یکدیگر تفکیک شده نیستند و یک مکتب فلسفی ریاضی باید موضع منسجمی در برابر سوالاتی که از این مقوله ها، بر می خیزند، اتخاذ کند. بد نیست یکی دو نمونه از سوال هایی را همیشه در فلسفه ریاضی مطرح بوده است و در این سخنرانی نیز مرتبا به آنها اشاره خواهد شد، بیان کنم. یکی از اساسی ترین مسایل فلسفه ریاضی، تشریح منشا یقین[۴] در ریاضیات است. همه ی ما می دانیم که گزاره های ریاضی از درجه ی یقینی بالاتر از درجه یقین احکام سایر علوم برخوردارند. در واقع بسیاری از اوقات، از ریاضیات به عنوان تنها رشته ی معرفت بشری که در آن، «حقیقت مطلق» معنا دارد، یاد می شود. منشا این درجه یقین چیست؟ آیا احکام ریاضی به درستی بیانگر حقیقت مطلق هستند و یا اینکه در این احکام نیز نوعی نسبیت وجود دارد؟ آیا درستی احکام ریاضی صرفا وابسته به ماهیت صوری آنهاست و یا اینکه این احکام دارای محتوای خبری هستند؟ مسئله دیگری که از قدیم الایام، هم در میان فلاسفه و هم درمیان ریاضیدانان جنجال برانگیز بوده است، مسئله دوگانگی «پیوسته» و «گسسته» است. این سوال که در ریاضیات، کمیت ها یا مفاهیم متصل، تقدم دارند و یا کمیت ها یا مفاهیم منفصل، احتمالا قدمتی همردیف با قدمت خود فلسفه دارد. خواهیم دید که جواب های رایج به این سوال، همواره ارتباط نزدیکی با گرایش های ریاضی زمانه و نیز دیدگاه های متداول فلسفه ریاضی داشته اند.

در سخنرانی های گذشته و به ویژه بحث های متعاقب آنها ، پدیده ای به چشم می خورد که لازم است آن را نیز به عنوان یک نکته مقدماتی در میان بگذارم ؛ چه به گمان من، این مطلب رابطه ای اساسی با دو واقعیت عینی زیر دارد: یکی اینکه اکثر ریاضیدانان از بحث های علنی درباره فلسفه ریاضی گریزانند؛ اگرچه کمتر ریاضیدانی هست که به طور خصوصی تمایل و سلیقه ویژه در این زمینه

[1] ontology [2] epistemology [3] metodology [4] certainty

نداشته باشد. دیگر اینکه موضوع فلسفه ی ریاضی در دو –سه دهه ی اخیر تحول عمده ای به خود ندیده و در مقایسه با بیشتر مقولات فلسفی، رشته ای عقیم و عقب مانده است. مطلبی که در ذهن دارم این است که علی رغم عنوان **سمینار فلسفه ریاضی** ، در بحث های جلسات گذشته ، صحبت های بسیاری از مکانیک کوانتومی و نظریه نسبیت (که از نظر یه های فیزیک نوین هستند) به میان آمد در حالی که عملا اشاره ای به نظریه های ریاضی معاصر نشد؛ البته سوای آنچه درباره نظریه مجموعه ها و منطق ریاضی (به اصطلاح «مبانی ریاضی») بیان گردید. بی شک عده ای ایراد مرا نابجا دانسته، دلایلی از این قبیل در رد آن اظهار خواهند کرد:

۱–تمام ریاضیات امروز(به استثنای بعضی گوشه های نظریهء رسته ها) بر پایه نظریه ء مجموعه ها بنا شده است. بنابراین کافی است توجه فلسفه ریاضی را به بررسی فلسفی نظریه مجموعه ها و منطق ریاضی (در ارتباط نزدیک با نظریه مجموعه هاست) معطوف کنیم.

۲– بیشتر تحقیقات ریاضی امروزدر جهت رشد درونی ریاضی است و در نتیجه ، اثری بر مقولات فلسفی ندارد.

۳– نظریه های مکانیک کوانتومی و نسبیت، تاثیری ژرف بر بینش فلسفی انسان از جهان نهاده اند؛ در حالی که تنها اکتشاف ریاضی معاصر که بتوان نقشی مشابه برایش قایل شد، قضیه گودل و شاید ظهور بی نهایت های بالفعل در نظریهء مجموعه ها باشد که این ها نیز به مبحث نظریه مجموعه ها تعلق دارند.

در مورد ادعای اول، باید بگوییم که حتی اگر بنا ساختن ریاضیات بر پایه نظریهء مجموعه ها را بپذیریم، تاثیر این نظریه بر بیشتر پژوهش های ریاضی، امری است کاملا سطحی و از نقش یک زبان متجاوز نمی کند. مثلا حتی نمی توان نقش نظریهء مجموعه ها را در ریاضیات با نقش ریاضیات در فیزیک، مقایسه کرد، زیرا از آغاز فیزیک به عنوان یک علم در قرن هفدهم میلادی تا به امروز، نهاد های ریاضی نقشی عمیق و حیاتی در بیان قوانین فیزیک داشته اند؛ در حالی که بیشتر مطالب ریاضیات امروز، دنبالهء طبیعی اکتشافات پیش از ظهور نظریهء مجموعه ها است. کمتر کشف مهم ریاضی در قرن بیستم است که نتوان بدون جدا کردن محتوای اصلی، به زبان ریمان و پوانکاره ترجمه کرد. غور در مبانی نظریهء مجموعه ها و منطق ریاضی حداکثر همان قدر به فلسفه و شناخت ریاضی کمک می کند که مطالعه دستور زبان برای بررسی ادبیات. در واقع سعی خواهم کرد ثابت کنم که نقش نظریهء مجموعه ها از این نیز ناچیز تر است و اتکای متداول امروزی به آن، خود زاییدهء دیدگاه های خاص در فلسفه ی ریاضی است.

درمورد ادعای دوم، مرز مشخصی میان مسائل درونی و مسائلی که میتوانند واکنش فلسفی ایجاد کنند وجود ندارد زیرا سیر پژوهش های واقعاً بدیع و اثرات احتمالی آنها، قابل پیش بینی نیست. نباید فراموش کرد که نظریه مجموعه های کانتور، در حدود زیادی، زاده پژوهش های او در بعضی مسائل کاملا درونی مربوط به سری های مثلثاتی بود. در هر صورت، اگر فلسفه ی یک علم، تحولات آن علم را نادیده بگیرد، به سرعت تبدیل به مجموعه ای بی ارتباط با موضوع اصلی خود می شود. مدعی هستیم که این دقیقا وضعیتی است که در فلسفه ریاضی پدید آمده است. دراین سخنرانی، سعی خواهم کرد که نشان دهم که سه مکتب غالب فلسفه ی ریاضی، یعنی منطق گرایی[۱]،شهود گرایی[۲]و صورتگرایی[۳]، هر یک با روی گردانیدن از تجربهء عینی ریاضی کاران، به مقوله ای مستقل از ریاضیات تبدیل شده است که جوابگوی کنجکاوی های فلسفهء ریاضیدانان حرفه ای نیست.

سرانجام، درباره نکته سوم، شکی نیست که نظریه های فیزیک نوین، دگرگونی های عمیقی در دیدگاه های فلسفی ایجاد کرده اند، ولی کافی است یادآوری کنم صحبت اصلی ما در اینجا **فلسفهء ریاضی** است نه فلسفه به مفهوم عام یا بررسی عواملی که بر دیدگاه های فلسفی اثرگذاشته اند.

۲. دوران باستان

برای بررسی تاریخ فلسفهء ریاضی، به نظر من باید سه دوره را در نظر گرفت. دورهء اول، از ادوار باستانی تا اواخر قرن هفدهم میلادی؛ دورهء دوم که با ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن و لایب نیتس آغاز می شود و حدودا دوقرن به درازا می کشد؛ و دورهء سوم، از زمان دقیق سازی مبانی آنالیز ریاضی توسط وایرشتراس و دیگران تا به امروز.

در دورهء اول، مبحث هستی شناسی در ریاضی، از بررسی «وجود» در سایر علوم جدا نیست. ریاضیات علم کمیت ها و شکل ها است و هدف آن بررسی این گونه خواص اشیاء تجربی است. پایه ء تجربی ریاضی در این دوره، به روشنی مشهود است. هندسه از اندازه گیری شروع می شود و حساب از تدوین جدول های نجومی و دفترداری امور تجاری و اداری سرچشمه می گیرد. کشف عدد ثابت **پی** (یعنی اینکه نسبت محیط دایره به قطر آن، عددی مستقل از اندازهء دایره است)، یکی از نخستین کشف های **علم تجربی** است. یونیان باستان ، برای آنچه ما امروز قضیه مینامیم دو لغت متمایز Theorema و Porisma را به کار می بردند. کلمه Theorema به معنی بینش یا شهود، به آن دسته از قضیه های ریاضی اطلاق می شود که صحتشان قبل از اثبات دقیق ریاضی، تجربه شده است و نوعی واقعیت حائز اهمیت یا مستقل از ذهن را بیان می کنند. این تمایز نشان می دهد که جنبهء صوری ریاضی در نظر

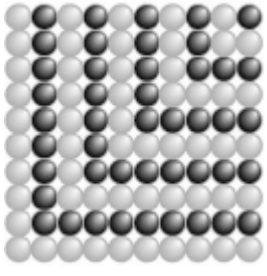
[1] logicism [2] intuitionism [3] formalism

یونانیان، نقشی فرعی دارد و محتوای عینی نتایج ریاضی است که در درجهء اول ، مورد نظر آنهاست. باید توجه داشت که حتی توسل به مُثُل افلاطونی در این اعتقاد که قضیه های ریاضی علی الاصول خواص اشیاء طبیعی را بیان می کنند، خللی وارد نمی کند. به عکس، از آنجا که در دیدگاه افلاطونی، جهان ایده ها از عینیت پایدارتری برخوردار است و مفاهیم ریاضی، والاترین وسیلهء ارتباط انسان با آن جهان می باشند، اصولاً عینیت های ریاضی مورد سوال نیست. نیز روش اصل موضوعی اقلیدس در این دوره، اثری بر دیدگاه هستی شناسی ریاضی ندارد، زیرا اصول اقلیدس، از نظر یونانیان بیانگر ابتدایی ترین خواص هندسی فضای واقعی محسوب می شود و صحت آنها به تجربه، مورد پذیرش عموم است.

در مبحث معرفت و روش شناسی در این دوره، آنچه ریاضیات را از سایر علوم متمایز می سازد، درجهء یقین ریاضی است و یقین در ریاضی، مبتنی بر «برهان» است و برهان نیز وسیله ای برای «دیدن» یا «اکتشاف» یک واقعیت است با کنار هم قرار دادن روابطی که صدقشان مورد تردید نیست. مثلا برای اثبات اینکه مجموع هر چند عددی فرد متوالی که از یک آغاز شوند، مربع کامل است، یعنی

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n + ۱) = k^۲,$$

فیثاغورسیان شکل زیر را رسم می کنند:



حتی در عصر دقت و وسواس کنونی، کمتر کسی با اندک ذوق ریاضی است که با چند لحظه نگاه کردن به این شکل، به حکم مورد نظر یقین نیاورد. البته این حکم را می توان به روش استقرا، از اصل پئانو[1] ثابت نمود. اینکه کدام اثبات ارجح است، به دیدگاه فلسفی ما بستگی دارد. به گمان من، اکثر ریاضی کاران، اثبات فیثاغورسی را روشن کننده تر و زیباتر می یابند. البته فراموش نکنیم که روش استقرا، یک وسیلهءکشف واقعیت نیست، بلکه حربه ای برای تأیید حدس هایی است که به روش های دیگر به آنها رسیده ایم.

[1] G.Peano

در اینجا لازم است چند کلمه ای هم دربارهء جدال « پیوسته-گسسته» بیان کنم. شواهد تاریخی روشنی هست که حساب و هندسه پیدایش مستقل از یکدیگردارند[۱]. حساب که با اعداد طبیعی سر و کار دارد تجلی ریاضی مفاهیم گسسته است. در حالی که موضوع هندسه بر پایه پیوستار[1] صفحه و فضا می باشد. اولین برخورد این دو علم، دراندازه گیری طول های هندسی است. در اینجا حساب در هندسه کاربرد می یابد؛ به ویژه با توسعهء مفهوم عدد به اعداد کسری، به نظر می رسید که بتوان همه طول های هندسی را با علائم حساب نمایش داد. کشف اولین عدد ناگویا (طول قطر مربع واحد) توسط فیثاغورسیان، بحرانی در ریاضی پدید آورد که نتیجه آن، توّفق هندسه بر حساب است و توسعه مفهوم عدد به نحوی که بتوان به هر طول، عددی نسبت داد. تا زمان کشف (یا اختراع) حساب دیفرانسیل و انتگرال، هندسه اقلیدسی، مظهر یقین علمی و محک سنجش یقین برای سایر مقولات است. حتی ابداع دستگاه مختصات و هندسهء تحلیلی توسط دکارت و فرما، که نتیجه آن جبری سازی هندسه است، از تقدم فلسفی هندسه نمی کاهد، زیرا علم جبر (دنباله طبیعی حساب) خود بر پایه پیوستار اعداد حقیقی، یعنی خط اقلیدسی بنا می شود.

۳. دورهء دوم

دو قرنی که دورهء دوم ریاضیات خوانده ایم، از یک سو دوران فتوحات درخشان و شگرف ریاضی است و از سوی دیگر، دوران بحران فلسفی در مبانی ریاضیات است. آنالیز نیوتن و لایب نیتس متکی بر مفهوم بی نهایت کوچک[۲] است که جای مناسبی در پیوستار اقلیدسی ندارد و فرض وجود آن خالی از تناقض و معما نیست. بینش اتمی لایب نیتس با فرض تقدم پیوستار، تضاد دارد. لایب نیتس که به خوبی از نادقیق بودن مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال آگاه بود، هرگز موفق نشد به نظری قاطع و نهایی درباره ماهیت و درجه یقین این علم دست یابد. او در یک نوشته اظهار می کند که صحت نتایج حساب دیفرانسیل و انتگرال، تقریبی است ولی درجهء خطا ماهیتاً چنان کوچک است که قابل اندازه گیری نیست. در جایی دیگر، اذعان می کند که تنها دلیل پذیرش بی نهایت کوچک ها، کارآیی آنهاست و اینکه در عمل به نتایج درستی منجر می‌شوند[۲]. علی رغم این معضلات فلسفی، حساب دیفرانسیل و انتگرال حربهء چنان نیرومندی در اکتشافات ریاضی است که مشکلات مربوط به مبانی آن، همگی به حاشیه رانده می شوند. وضعیت مشابهی همزمان در علم فیزیک پدید می آید. قدرت مکانیکی نیوتنی

[۲] infinitesimal به تعبیر لایب نیتس و fluxion به تعبیر نیوتن.

[1] continuum

در پیش بینی پدیده های نجومی چنان است که تردید های شروع فلسفی نسبت به آن، حل نشده به خاموشی سپرده می شوند. ریاضیدانان این دوره، به خوبی از تزلزل و عدم یقینی که در مبانی آنالیز وجود دارد آگاه هستند و از این رو، بحث و مجادلهء دربارهء صحت قضیه های ریاضی، بسیار رایج است. باوجود این، تا مدت مدیدی، همت موفقیت آمیزی برای دقیق ساختن تعریف ها گمارده نمی شود. دوم اینکه علی رغم روشن نبودن مفاهیم اولیه، اشتباه فاحشی در ریاضیات رخ نمی دهد که موجب آشفتگی یا رکود تحقیق در ریاضی شود. در اینجا ممکن است ایراد گرفته شود که ادعای کوشی مبنی بر اینکه « حد یک دنبالع از تابع های پیوسته ، همواره پیوسته است»، نمونه ای از اشتباه های فاحش در این دوره است (مثال های دیگر از این نوع، فراوان است). البته چنین عبارتی در چارچوب دیدگاه فلسفی ریاضی امروزی، یک اشتباه نابخشودنی محسوب می شود، ولی باید از دیدگاه دیگری به مسئله نگاه کرد. تعبیر دقیق کوشی از این ادعا هنوز روشن نیست و بحث های فراوانی در این زمینه شده است[۳].

آنچه مسلم است این است که کوشی و ریاضیدانان زمان او، از مثال های ناقص این ادعا (به مفهوم امروزی تعاریف)، مانند سری فوریه ای که به یک تابع ناپیوسته میل می کند، کاملا آگاه بوده اند. مثلا آبل در جایی مینویسد که «قضیه کوشی استثناهایی دارد» ولی ادعای کوشی را به نحوی، اساساً درست می داند. اگر امروزه این طرز بیان در ریاضی خیلی غریب به نظر می رسد به این دلیل است که دیدگاه هستی شناسی ریاضی در یک قرن اخیر، دگرگونی عظیمی به خود دیده است. در نظر ما، «تابع پیوسته» و «همگرایی»، اشیاء اصیل و اساسی ریاضی هستند که نهایت دقت در به کاربستن آنها رعایت می شود. در حالی که حتی اویل قرن نوزدهم میلادی، دیدگاه در مورد مقولهء وجود، اساساً همان دیدگاه دورهء اول است. اشیاء ریاضی یا عینیت فیزیکی دارند و یا مفهوم های بسیار مانوس ریاضی هستند که در اثر تجربهء متمادی، عملا عینیت یافته اند (مثلا عدد های صحیح، شکل های هندسی و معادلات جبر). «اشتباه» در ریاضی وقتی رخ می دهد که نتیجه ای درباره ای مفاهیم ملموس بدست آید که نادرستی آن قابل تحقیق باشد. در زمینه معرفت نیز اثبات ریاضی هنوز یک حربه یا اکتشاف است. قضیه ها و نظریه های کلی ریاضی، وسیله هایی برای روشن ساختن پدیده های خاص هستند. به قول کانت: « اثبات، یک طریق رسیدن به حقیقت است مانند دیدن و شنیدن.» چون کشف واقعیت های جالب، هدف نهایی ریاضیدانان است، برخی مانند اویلر از هیچ وسیله ای برای دست یافتن به واقعیت های ریاضی فروگذار نمی کنند. مثالی را که جورج پولیا گفته است [۴] برای کسانی که ندیده اند، نقل می کنم. اویلر می خواهد مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را محاسبه کند. او میداند که اگر ریشه های یک چند جمله ای، عدد های $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ باشند، آن چند جمله ای به صورت $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$

است که در آن، c عددی ثابت است. تابع $sinx$ یک چند جمله ای نیست و معادله $sinx = ۰$ بی نهایت جواب دارد که عبارت اند از:

$$۰, \quad \pm\pi, \quad \pm ۲\pi, \ldots.$$

با وجود این، اویلر به آزمایشی ماجراجویانه دست می زند. او حاصل ضرب بی نهایت عامل خطی را که از این ریشه ها به دست می آیند، در نظر می گیرد:

$$c(x^۲ - \pi^۲)(x^۲ - ۴\pi^۲)\cdots.$$

آیا حاصل ضرب معنا دارد؟ آیا میتوان با انتخاب مقدار مناسبی برای c ، این حاصل ضرب را مساوی با $sinx$ دانست؟ البته اویلر کاملا با سری تیلور آشنا است. او می داند که

$$sinx = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots.$$

ضریب x در این عبارت برابر ۱ است و در عبارت قبلی برابر با

$$c(-\pi^۲)(-۴\pi^۲)\cdots.$$

به همین دلیل، اویلر c را به طور صوری برابر با

$$(\frac{-۱}{\pi^۲})(\frac{-۱}{۴\pi^۲})\ldots$$

می گیرد و با توزیع عوامل آن در حاصل ضرب فوق، به فرمول زیر دست می یابد:

$$sinx = x(۱ - \frac{x^۲}{\pi^۲})(۱ - \frac{x^۲}{۴\pi^۲})\ldots.$$

البته هنوز چیزی « ثابت نشده است» ولی اویلر می داند که ضریب جمله اول، درست است. جمله ناصفر بعدی، جمله ی درجه سوم است. اگر این فرمول درست باشد، مقایسه ضریب جمله درجه سوم آن با ضریب جمله ی درجه سه در بسط تیلور تابع $sinx$ ، نتیجه می دهد

$$-\frac{۱}{۶} = -\frac{۱}{\pi^۲} - \frac{۱}{۴\pi^۲} - \frac{۱}{۹\pi^۲} + \cdots.$$

بنابراین

$$۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots = \frac{\pi^۲}{۶}.$$

اویلر آگاه است که «اثبات» او یقین اثبات های اقلیدسی را ندارد، پس بی درنگ به تحقیق دربارهء این تساوی می پردازد و با محاسبه دو طرف تا تعداد زیادی رقم بعد از اعشار، یقین حاصل می کند که به واقعیت دست یافته است! امروزه فیزیک دانان همچنان به چنین ماجراجویی هایی می پردازند و ریاضیدانان هم در خفای دفتر کارشان، به این گونه آزمایش ها دست می زنند ولی افشای چنین اعمالی در جامعهء ریاضی گناه کبیره محسوب می شود. یادآوری میکنم که مقصود من از آوردن این مثال ها، تاکید بر این مطلب است که در دوره دوم تاریخ ریاضی نیز، مانند دوره ی اول، اشیاء ریاضی عینیتی مشابه سایر علوم دارند و اثبات ریاضی تنها، حربه ای است برای دست یافتن به روابط این اشیاء یا استحکام بخشیدن به روابطی که صحت آنها به طریق تجربی مشاهده شده است. حتی وایرشتراس که بعدا به عنوان نقطه عطف دیدگاه فلسفی ریاضی از او یادخواهد شد، در نامه ای به یک دوست ریاضیدان خود می نویسد: «اینکه برای یک ریاضیدان به عنوان مکتشف استفاده از هر روشی مشروع است، امری است بدیهی...»[۱] تفاوت عمده فلسفه های ریاضی در دوره های اول و دوم در این است که ریاضیات دورهء دوم (عمدتا حساب دیفرانسیل انتگرال)، بر پایه متزلزل «بی نهایت کوچک ها» بنا شده است و یقین ریاضی که قرن ها در هندسه اقلیدسی والاترین تجلی خود را یافته بوئ، دستخوش بحرانی نگران کنندع می شود تا جایی که بزرگترین ریاضیدانان این دوره، به وجود «استثنا» برای قضیه های خود، تن در می دهند.

[۱] نقل از[۳]

مراجع

[1] van der Waerden, L., Science Awakening, Noordhoff, Netherlands, 1975.

[2] Struik, D. J., A Source Book in Mathematics: 1200-1800, Harvard University Press, 1969.

[3] Lakatos, I., Mathematics, Science and Epistemology, Cambridge University Press, Cambridge,1978.

[4] Polya, G., Patterns of Plausible Reasoning (2 Vols.), Princeton University Press, 1954.