در مقایسه با معادله (۲ــ۴) کاملا واضح است که بردار z را می‌توان همان $\dot{\boldsymbol{q}}$ در نظر گرفت. برای کوتاه شدن نوشتار از این پس هرجا لازم باشد به جای توابعی مثل $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{p})$ تنها $\boldsymbol{M}$ نوشته خواهد شد. با یک مرتبه مشتق گیری از رابطه (۲ــ۱۸):

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}\dot{z} + \dot{\boldsymbol{J}}z \tag{۲ــ۱۹}$$

و جای‌گذاری در معادله دینامیکی (۲ــ۱۵) داریم:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\dot{z} + \left(\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{J}\right)z = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} - A^T\boldsymbol{\lambda} \tag{۲ــ۲۰}$$

از این جهت که ربات متحرک در صفحه حرکت می‌کند ترم بردار گرانش $\boldsymbol{G}$ برابر صفر است. همچنین برای سادگی از ترم اصطکاک نیز صرف‌نظر کرده ایم (چون در آینده از یک روش کنترل مقاوم استفاده می‌کنیم، این موضوع چندان نگران‌کننده نخواهد بود). حال با توجه به رابطه (۲ــ۱۷) با پیش‌ضرب کردن $\boldsymbol{J}^T$ در معادله (۲ــ۲۰) می‌توان قید را از معادله دینامیکی ربات حذف نمود:

$$\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\dot{z} + \left(\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{J}\right)z = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} - \underbrace{\boldsymbol{J}^T A^T}_{(AJ)^T=0}\boldsymbol{\lambda}$$

بنابراین به‌جای استفاده از مدل مقید رابطه (۲ــ۱۵) می‌توانیم از مجموع دو معادله زیر برای بررسی دینامیک ربات استفاده کنیم:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{p})z \tag{۲ــ۲۱}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}\dot{z} + \overline{\boldsymbol{V}}z = \overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\tau} \tag{۲ــ۲۲}$$

که در آن:

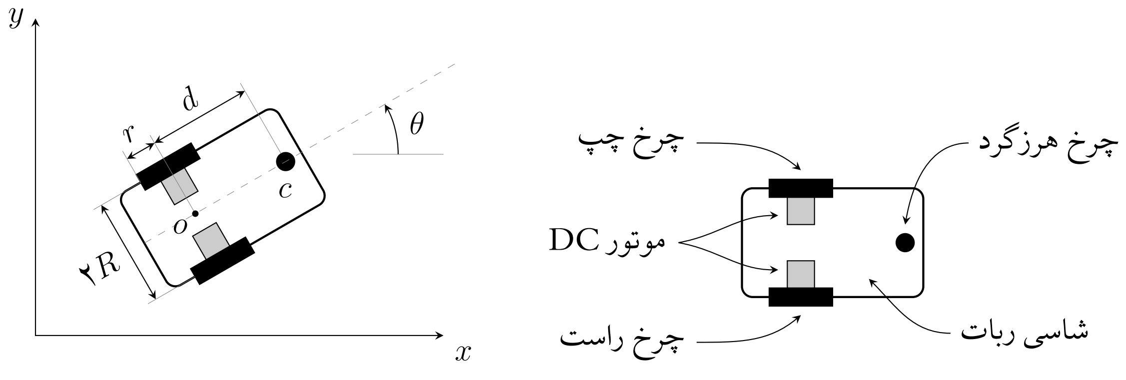
$$\overline{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}, \qquad \overline{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{J}, \qquad \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{B}$$

رابطه (۲ــ۲۱) معادله سینماتیکی سیستم است که با معادله (۲ــ۲۲) در مجموع معرف دینامیک سیستم هستند.

در بخش بعد، با بهره‌گیری از روش ارائه شده در این قسمت، به مدلسازی ربات متحرک مورد نظر پرداخته و پارامترهای دینامیکی ارائه شده در بخش حاضر را با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲-۲-۴- مدلسازی ربات متحرک با محرک تفاضلی[۱]

ربات متحرک مورد نظر در این پژوهش از نوع ربات متحرک با محرک تفاضلی است، که دارای دینامیک غیرخطی و غیرهولونومیک می‌باشد. این ربات دارای دوچرخ محرک است که بر روی یک محور قرار گرفته اند. حرکت و جهت‌گیری ربات به‌وسیله دو موتور DC انجام می‌گیرد که گشتاور مورد نیاز چرخ‌ها



(ب) (آ)

شکل ۲ــ۲: ساختار یک ربات متحرک با محرک تفاضلی

را فراهم می‌کنند. یک چرخ هرزگرد نیز به‌منظور حفظ تعادل در جلوی ربات قرار داده شده است. شکل ۲ــ۲ ساختار هندسی رباتی را نشان می‌دهد که قرار است مدل‌سازی ریاضی آن را انجام دهیم.

در کنترل ربات متحرک، هدف کنترل موقعیت، جهتگیری و سرعت‌های آنها است، پس در ابتدا لازم است نقطه مرجعی به عنوان موقعیت ربات درنظر گرفته شود. با توجه به نتایج بدست آمده در [۳] در صورت انتخاب نقطه o (قرار گرفته روی مرکز محور دو چرخ) به عنوان موقعیت ربات، استفاده از روش‌های کنترلی مرسوم از جمله خطی‌سازی فیدبک منجر به شکست خواهد شد و با یک سیستم کنترل‌ناپذیر روبرو خواهیم بود. برای غلبه بر این مشکل راه حل‌هایی ارائه شده است. یک راه حل مرسوم که مربوط به مدل‌سازی ربات می‌باشد، انتخاب نقطه‌ای خارج از محور دوچرخ ربات است. بنابراین در اینجا نقطه‌ی واقع بر روی چرخ هرزگرد که به فاصله d از محور دو چرخ قرار دارد را به عنوان نقطه‌ی مرجع برای بیان موقعیت ربات در صفحه xy درنظر می‌گیریم (نقطه c). همچنین جهت گیری ربات را نیز با زاویه θ میان خط عمود بر محور دوچرخ ربات و راستای محور x بیان می‌کنیم (شکل ۲ــ۲ (ب)). پس در ادامه مدل‌سازی را بر اساس نقطه مرجع (x_c, y_c) و زاویه θ یا در بیان کلی، مختصات تعمیم‌یافته $\boldsymbol{p} = [x_c, y_c, \theta]^T$ انجام می‌دهیم.

قید غیر هولونومیک ربات به صورت زیرخواهد بود که در شرایط عدم لغزش چرخ‌ها ایجاب می‌کند حرکت ربات تنها در راستای عمود بر محور چرخها باشد:

$$\dot{y}_c \cos\theta - \dot{x}_c \sin\theta - d\dot{\theta} = \text{۰} \qquad (\text{۲۳ـ۲})$$

ژاکوبین ربات برای نقطه o به سادگی به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} \dot{x}_o = v\cos\theta \\ \dot{y}_o = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{p}_o) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{۰} \\ \sin\theta & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۱} \end{pmatrix}$$

[1] Differential Drive Mobile Robot