

فهرست مطالب

۱	فصل ۱: مقدمات و مفاهیم مورد نیاز
۲	۱-۱ مقدمه
۲	۱-۲ تعاریف و مفاهیم اولیه
۶	فصل ۲: مبانی و مرور ادبیات مساله
۷	۲-۱ مقدمه
۷	۲-۲ حساب تغییرات
۹	۲-۳ تئوری کنترل بهینه
۱۱	پیوست‌ها
۱۲	مراجع

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱:

مقدمات و مفاهیم مورد نیاز



۱-۱- مقدمه

در این فصل، برخی مفاهیم اولیه و کلیدی مورد نیاز در فصل‌های آتی به‌طور خلاصه بیان می‌شوند.

۱-۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱-۲-۱ یک ماتریس متقارن، ماتریسی است که مولفه‌های هر سطر برابر مولفه‌های ستون متناظر آن هستند، یعنی، $a_{ij} = a_{ji}$. به عبارت دیگر، اگر $A = A^T$ ، ماتریس A را متقارن گوئیم.

تعریف ۱-۲-۲ ماتریس Q ، متقارن از مرتبه n ، را نیمه‌معین مثبت گوئیم اگر برای هر بردار ستونی غیر صفر x با n سطر، حاصل $x^T Q x$ یک مقدار عددی نامنفی باشد.

تعریف ۱-۲-۳ ماتریس R ، متقارن و مربعی $m \times m$ ، را معین مثبت گوئیم اگر برای هر بردار ستونی غیر صفر u با m سطر، حاصل $u^T R u$ یک مقدار عددی مثبت باشد.

تعریف ۱-۲-۴ در ریاضیات، سری تیلور یا بسط تیلور^۱ نمایش یک تابع به‌صورت مجموع بی‌نهایت جمله است که از مشتق‌های تابع در یک نقطه به‌دست می‌آید. سری تیلور یک تابع $f(x)$ با مقادیر حقیقی یا مختلط که در همسایگی نقطه حقیقی یا مختلط x_0 بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، سری توانی زیر است:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \dots,$$

که می‌توانیم آن را با علامت سیگما خلاصه‌تر بنویسیم: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$. توجه داشته باشید که تابع $f^{(n)}(x_0)$ ، مشتق n ام تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ است. سری تیلوری که حول نقطه $x = 0$ نوشته شود، سری مک‌لوران^۲ نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۵ تابع $f(x)$ را تحلیلی نامند اگر در همسایگی $x = a$ سری تیلور آن به $f(x)$ همگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۶ دنباله $f_n(x)$ را همگرای یکنواخت^۳ به تابع $f(x)$ گوئیم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $N > 0$ موجود باشد به‌قسمی که به‌ازای هر x متعلق به دامنه تابع و هر $n > N$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

دقت کنید که در حالت همگرای یکنواخت، N تنها به ε بستگی دارد و به x وابسته نخواهد بود. اما در حالت همگرای نقطه‌ای N هم به ε و هم به x بستگی دارد. تعریف ریاضی همگرای یکنواخت به شکل

^۱Taylor series ^۲Maclaurin series ^۳Uniformly convergence



زیر می‌باشد:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad s.t. \quad \forall x \in X, n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

و یا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

تعریف ۱-۲-۷- تاریخچه یا سابقه مقادیر سیگنال کنترل در مدت زمان $[t_0, t_f]$ توسط u نشان داده شده و آنرا سابقه کنترل^۱ و یا به‌طور ساده کنترل گویند.

تعریف ۱-۲-۸- تاریخچه یا سابقه مقادیر وضعیت در فاصله $[t_0, t_f]$ به‌نام سابقه وضعیت یا منحنی وضعیت نامیده شده و توسط x نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۹- سیگنال کنترلی که در تمام مدت $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های کنترل صدق نماید به کنترل قابل قبول^۲ معروف می‌باشد.

تعریف ۱-۲-۱۰- منحنی مسیر متغیر وضعیت که در مدت زمان $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های متغیر وضعیت صدق نماید، منحنی مسیر قابل قبول^۳ نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲-۱۱- کنترل قابل قبول u^* که باعث می‌شود سیستم $x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$ مسیر قابل قبول x^* را تعقیب نموده و تابعی زیر را حداقل نماید، را کنترل بهینه و منحنی مسیر قابل قبول را منحنی مسیر بهینه می‌نامند.

$$J = J(x(k_0), u(k_0), k_0) = S(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} V(x(k), u(k), k).$$

تعریف ۱-۲-۱۲- شاخص عملکرد بصورت تابعی از یک یا چند تابع می‌باشد که به آن تابعی معیار گفته می‌شود و آن را با J نشان می‌دهیم، در واقع یک تابعی، ممکن است به یک یا چندین تابع وابسته باشد همانند تابعی J که به توابع کنترل و حالت وابسته می‌باشد.

تعریف ۱-۲-۱۳- تابعی معیار به سه صورت در مسایل کنترل بهینه ظاهر می‌شود، اگر تابعی عملکرد تنها شامل هزینه نهایی یعنی $J = S(x(k_f), k_f)$ باشد به مساله مایر^۴ معروف است، اگر تنها شامل قسمت $J = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} V(x(k), u(k), k)$ باشد به آن مساله لاگرانژ^۵ می‌گویند و بالاخره اگر بصورت کلی

$$J = J(x(k_0), k_0) = S(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} V(x(k), u(k), k),$$

باشد به آن مساله بولزا^۶ گفته می‌شود.

^۱Control history ^۲Admissible control ^۳Admissible trajectory ^۴Mayer problem ^۵Lagrange problem
^۶Bolza problem



تعریف ۱-۲-۱۴- سیستم $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ را کاملاً کنترل پذیر گوئیم هر گاه سیگنال u وجود داشته باشد به طوری که بتوان حالت سیستم را از هر حالت اولیه $x(k_0)$ در زمان k_0 به هر حالت نهایی $x(k_f)$ در زمان $k_f - k_0$ انتقال دهیم که معادل با قابل دسترس بودن سیستم می باشد. عبارتی باید ماتریس زیر دارای رتبه کامل باشد و یا نامنفرد (وارون پذیر) باشد.

$$[B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B].$$

تعریف ۱-۲-۱۵- نمو تابعی J را با ΔJ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\Delta J \triangleq J(x(k) + \delta x(k)) - J(x(k)).$$

در تعریف فوق $\delta x(k)$ را تغییرات تابع $x(k)$ می گویند. چون نمو تابعی هم به تابع $x(k)$ و هم به تغییرات آن یعنی $\delta x(k)$ بستگی دارد، می توان آن را به صورت $\Delta J(x(k), \delta x(k))$ نوشت. با استفاده از بسط تیلور $J(x(k), \delta x(k))$ حول تابع $x(k)$ به رابطه زیر برای ΔJ می رسم:

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(x(k)) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right) \delta x(k) + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\right) (\delta x(k))^2 + \dots - J(x(k)) \\ &= \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right) \delta x(k) + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\right) (\delta x(k))^2 + \dots = \delta J + \delta^2 J, \end{aligned}$$

در رابطه فوق δJ تغییرات اول و $\delta^2 J$ تغییرات دوم تابعی J بوده و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right) \delta x(k),$$

$$\delta^2 J = \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\right) (\delta x(k))^2.$$

تغییرات δJ تابعی J قسمت خطی (یا تخمین مرتبه اول) نمو ΔJ نسبت به $\delta x(k)$ است.

تعریف ۱-۲-۱۶- یک تابعی J دارای یک منحنی اکسترمم نسبی در x^* است اگر یک $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد که به ازاء هر x از دامنه تابعی که در رابطه $\|x - x^*\| < \epsilon$ صدق می کند، نمو J دارای علامت ثابت باشد. اگر $\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0$ ، $J(x^*)$ حداقل نسبی و اگر $\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0$ ، $J(x^*)$ حداکثر نسبی است. اگر روابط بالا برای یک $\epsilon > 0$ اختیاری بزرگی صادق باشد، آنگاه $J(x^*)$ مقدار بهینه سراسری مطلق می گویند.

مشابه یافتن مقدار بهینه توابع، برای مسایل تغییراتی مربوط به تابعی ها، تغییرات اول باید روی منحنی بهینه صفر باشد. اکنون نتایج را با یک قضیه بیان می کنیم که به قضیه اساسی حساب تغییرات^۱ معروف است و اثبات آن در کتاب های مربوط به حساب تغییرات موجود است.

^۱Fundamental theorem of calculus of variations



قضیه ۱-۲-۱- برای اینکه منحنی $x^*(k)$ به عنوان یک نامزد بهینگی باشد، تغییرات (اول) تابعی J باید روی $x^*(k)$ صفر باشد. به عبارتی، برای تمام مقادیر مجاز $\delta x(k)$ باید $\delta J(x^*(k), \delta x(k)) = 0$ باشد. این شرط، یک شرط لازم است. شرط کافی برای حداقل بودن این است که تغییرات دوم مثبت باشد، به عبارتی، $\delta^2 J > 0$ و برای حداکثر بودن باید $\delta^2 J < 0$ باشد.

فصل ۲:

مباني و مرور ادبيات مساله



۲-۱- مقدمه

هدف نهایی در طراحی سیستم‌های کنترل به دست آوردن کنترل‌کننده‌ای است که باعث عملکرد مطلوب سیستم می‌شود. عملکرد مطلوب سیستم معمولاً برحسب مشخصه‌های زمانی نظیر زمان صعود، زمان قرار، حداکثر جهش، و یا برحسب مشخصه‌های فرکانسی نظیر حد فاز، حد دامنه و پهنای باند بیان می‌شود. روش‌های متعارف طراحی سیستم‌های کنترل، معمولاً روش‌های سعی و خطا می‌باشند، که در آنها برای تعیین پارامترهای طراحی یک سیستم مورد قبول، روش‌های مختلف تحلیل، به‌طور تکراری^۱ مورد استفاده قرار می‌گیرند. با روش سعی و خطا، یا یک کنترل‌کننده قابل قبول به دست می‌آید و یا طراح نتیجه می‌گیرد که مشخصات مورد لزوم نحوه عملکرد، نمی‌توانند مصداق پیدا کنند. اما مسایل پیچیده زیادی قابل حل با روش‌های متعارف نیستند. به عنوان مثال، طراحی سیستم کنترل موقعیت هواپیما که مصرف سوخت را نیز حداقل کند، با استفاده از روش‌های متعارف امکان پذیر نمی‌باشد. روش جدید و مستقیم طراحی چنین سیستم‌های پیچیده‌ای، که کنترل بهینه^۲ نامیده می‌شود، با توسعه کامپیوترهای دیجیتال امکان پذیر شده است. هدف کنترل بهینه، تعیین سیگنال‌های کنترلی است به طوری که یک مجموعه از قیود و محدودیت‌ها توسط یک فرآیند دینامیکی برآورده شده و به‌طور همزمان، یک یا چندین معیار عملکرد^۳، حداقل (یا حداکثر) شود.

۲-۲- حساب تغییرات

بر اساس افسانه‌ها [۱۲] پرنسس صوری دیدو^۴ یک طناب ساخته شده از چرم را به شکل یک کمان دایره‌ای برای حداکثر کردن مساحت محصور شده، جهت تأسیس شهر کارتاژ^۵ مورد استفاده قرار داده است. اگر چه داستان تأسیس شهر کارتاژ ساختگی است، ولی احتمالاً رشته جدیدی در علم ریاضی با نام حساب تغییرات و گسترش‌های آن مانند تئوری کنترل بهینه از آن الهام گرفته شده است. حساب تغییرات شاخه‌ای از ریاضیات است که در مورد یافتن یک تابع که یک تابعی^۶ را حداکثر یا حداقل^۷ می‌نماید، بحث می‌کند. یک تابعی بطور ساده به صورت تابعی از یک تابع تعریف می‌شود. تئوری یافتن حداکثر یا حداقل توابع، کاملاً قدیمی بوده و می‌توان در مسایل ایزوپری متریک^۸ بررسی شده توسط ریاضیدانان یونانی مانند زنودوروس^۹ (۴۳۵-۴۹۵ قبل از میلاد) و پوپوس^{۱۰} (۲۹۰-۳۵۰ قبل از میلاد) آن را مشاهده کرد. ولی ما با کارهای برنولی^{۱۱} آن را می‌شناسیم. در سال ۱۶۹۹ ژوهانس برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) مساله براچیستوچرانه^{۱۲} را مطرح کرد: مساله یافتن کوتاهترین مسیر بین دو نقطه که در یک خط عمودی یا افقی قرار ندارند. این مساله که ابتدا بوسیله گالیله^{۱۳} (۱۵۶۴-۱۶۴۲) در سال ۱۶۳۸ مطرح شد، بوسیله جان برنولی^{۱۴}، برادرش ژاکوب^{۱۵} (۱۶۵۴-۱۷۰۵)، گاتفرید لیبنیز

^۱Iterative ^۲Optimal control ^۳Performance index ^۴Tyrian Princess Dido ^۵Carthage

^۶Functional ^۷Extremum ^۸Isoperimetric ^۹Zenodorus ^{۱۰}Poppus ^{۱۱}Bernoulli

^{۱۲}Brachistochrone problem ^{۱۳}Galilei ^{۱۴}John Bernoulli ^{۱۵}Jacob



۱ (۱۶۴۶-۱۷۱۶) و ایساک نیوتن^۲ (۱۶۴۲-۱۷۲۷) حل شد. لئونارد اویلر^۳ (۱۷۰۷-۱۷۸۳) با پیوستن به تیم جان برنولی سهم قابل توجهی در توسعه آن داشت، و ژوزف لویی لاگرانژ^۴ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) را تحت تاثیر قرار داد، کسی که نهایتاً روش ممتازی برای حل این نوع از مسایل به شیوه (اولین) تغییرات را ارائه کرد. این کارها، اویلر را به ابداع اصطلاح حساب تغییرات سوق داد. بعدها این شرایط لازم برای بهینگی تابعی‌ها، معادله اویلر-لاگرانژ نامیده شد. لاگرانژ با کار روی مسایل با نقاط انتهایی متغیر، روش ضرب‌کننده‌ها را ابداع کرد که بعدها یکی از قویترین ابزارها، ضرب‌کننده‌های لاگرانژ (یا اویلر-لاگرانژ) در بهینه‌سازی شدند. شرایط کافی برای یافتن مقدار بهینه تابعی‌ها در حساب تغییرات بوسیله آندریه ماری لژاندر^۵ (۱۷۵۲-۱۸۳۳) در سال ۱۷۸۶ با در نظر گرفتن تغییرات دوم ارائه شد. کارل گاستاو ژاکوب ژاکوبی^۶ (۱۸۰۴-۱۸۵۱) در سال ۱۸۳۶ تحلیل محکم‌تری برای شرایط کافی بیان کرد. این شرایط کافی بعداً با نام شرایط لژاندر-ژاکوبی مطرح شد.

تقریباً به‌طور همزمان هامیلتون^۷ (۱۷۸۸-۱۸۵۶) کارهای مهمی در مکانیک انجام داد، او نشان داد حرکت یک ذره در فضا تحت نیروهای مختلف خارجی را می‌توان با یک تابع که در دو معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول صدق می‌کند، بیان کرد. در سال ۱۸۳۸ ژاکوبی ایراداتی به این کار گرفت و نشان داد فقط یک معادله دیفرانسیل جزئی لازم است. این معادله را "معادله هامیلتون-ژاکوبی" نامیدند، که بعداً تاثیر عمیقی روی حساب تغییرات و برنامه‌ریزی پویا، کنترل بهینه و مکانیک گذاشت. رودلف کلبش^۸ (۱۸۳۳-۱۸۷۲) و آدولف مایر^۹ شرایط برای دسته جامع‌تری از مسایل را مطرح کردند. کلبش یک مساله در حساب تغییرات با الحاق شرایط قیدی به‌شکل معادلات دیفرانسیل تدوین کرد و یک شرط بر اساس تغییرات دوم ارائه کرد. در سال ۱۸۶۸ مایر کار کلبش را مجدداً بررسی کرده و نتایج شاخصی برای مساله جامع حساب تغییرات ارائه کرد. مایر بعدها "مساله لاگرانژ" را در سال ۱۸۷۸ و "مساله مایر" را در سال ۱۸۹۵ با جزئیات تشریح کرد.

در ۱۸۹۸، آدولف کنسر^{۱۰} روش جدیدی در حساب تغییرات با استفاده از نتایج کارل گاوس^{۱۱} (۱۷۷۷-۱۸۵۵) روی ژئودزیکس^{۱۲}، برای مسایل نقطه انتهایی متغیر ارائه کرد. او با همکاری اسکار بولزا^{۱۳} (۱۸۵۷-۱۹۴۲) نتایج شایسته‌ای برای این مسایل ارائه کرد. در بین سال‌های ۱۹۰۸ تا ۱۹۱۰، گیلبرت بلیس^{۱۴} (۱۸۷۶-۱۹۵۱) [۴] و ماکس میسون^{۱۵} نگاه عمیقی بر نتایج کنسر داشتند. بولزا در ۱۹۱۳ "مساله بولزا" را به‌عنوان تعمیمی از مساله لاگرانژ و مایر تدوین کرد. بلیس نشان داد که هر سه این مسایل معادل هستند [۱۴].

^۱Gottfried Leibniz ^۲Issac Newton ^۳Leonard Euler ^۴Joseph-Louis Lagrange ^۵Andrien Marie Legendre ^۶Carl Gustav Jacob Jacobi ^۷Sir William Roman Hamilton ^۸Rudolph Clebesh
^۹Adolph Mayer ^{۱۰}Adolf kneser ^{۱۱}Karl Gauss ^{۱۲}Geodesics ^{۱۳}Oskar Bolza ^{۱۴}Gilbert Bliss
^{۱۵}Max Mason



۲-۳- تئوری کنترل بهینه

مساله کنترل خطی مربعی ابتدا بوسیله واینر^۱ روی فیلترهای میانگین مربعات برای کنترل آتش جنگ افزارها در جنگ جهانی دوم (۱۹۴۰-۱۹۴۵) ارایه شد [۱۸؛ ۱۹]. واینر مساله طراحی فیلترهایی را که معیار میانگین مربعات خطای (شاخص عملکرد) زیر را حداقل می‌کردند، حل کرد:

$$J = E\{e^2(t)\},$$

که $e(t)$ خطا و $E\{x\}$ امید ریاضی متغیر تصادفی x است. برای حالت قطعی، معیار خطای فوق به صورت انتگرالی مربعی زیر تعمیم می‌یابد:

$$J = \int_0^\infty e'(t)Qe(t)dt,$$

که Q یک ماتریس مثبت معین است. بلمن در سال ۱۹۵۷ تکنیک برنامه‌ریزی پویا^۲ را برای حل مسایل کنترل بهینه گسسته‌زمانی مطرح کرد [۱]. ولی مهمترین کار در سیستم‌های کنترل بهینه توسط پونتریگین^۳ و همکارانش در سال ۱۹۵۶ با نام اصل حداکثر^۴ بیان شد [۵] و در کتاب آنها با جزئیات ارایه شده است [۱۵]. همچنین، مقاله جالب "کشف اصل حداکثر" که نویسنده آن گامکرلیدز^۵ [۷] یکی از نویسندگان کتاب اصلی [۱۵] است، را ببینید. در این زمان در ایالات متحده، کالمن در سال ۱۹۶۰ تئوری تنظیم‌کننده خطی مربعی^۶ (LQR) و تئوری گوسین خطی مربعی^۷ (LQG) را برای کنترل فیدبک بهینه ارایه کرد [۱۰]. او فیلتر بهینه و تئوری تخمین را ارایه کرد، که به فیلتر کالمن گسسته معروف او [۱۱] و فیلتر کالمن پیوسته او و باسی^۸ [۹] منتهی شد. کالمن تاثیر عمیقی روی تئوری کنترل بهینه داشت و فیلتر کالمن یکی از پرستفاده‌ترین تکنیک‌های کاربرد تئوری کنترل بهینه در دنیای واقعی و در حوزه‌های مختلف است.

در اینجا اشاره‌ای به معادله ماتریسی ریکاتی^۹ می‌کنیم که در تکنیک‌های فیلتر کالمن و بسیاری حوزه‌های دیگر ظاهر می‌شود. ریکاتی نتایج کار خود را در سال ۱۷۲۴ برای حل برخی معادلات دیفرانسیل غیرخطی ارایه کرد [۱۶؛ ۳] بدون اینکه بداند معادله ریکاتی پس از حدود دو قرن بعد بسیار معروف می‌شود.

بنابراین، کنترل بهینه، ریشه در حساب تغییرات ایجاد شده در قرن‌های ۱۶ و ۱۷ میلادی داشته و در حدود ۳۰۰ سال قبل متولد شده است [۱۷]. برای جزئیات بیشتر در مورد تاریخچه حساب تغییرات و کنترل بهینه، می‌توانید به مطالب گران‌بهای مراجع [۲؛ ۶؛ ۸؛ ۱۳؛ ۱۷] مراجعه کنید. در کنترل خطی مربعی، عبارت "خطی" به معنی این است که فرآیند خطی است و عبارت "مربعی" بدین معنی است که

^۱N. Wiener ^۲Dynamic programming ^۳Pontryagin ^۴Maximum principle ^۵R. V. Gamkrelidze

^۶Linear quadratic regulator ^۷Linear quadratic gaussian ^۸Bucy ^۹Matrix Riccati Equation



شاخص عملکرد شامل توان دوم یا مربع خطا و یا کنترل است. در ابتدا این مساله را "مساله کنترل میانگین مربعی"^۱ می‌گفتند و عبارت "خطی مربعی" تا سال ۱۹۵۰ در متون مربوطه وجود نداشته است.

^۱Mean-squared control problem

پیوست‌ها

مراجع

- [1] Bellman, Richard. Dynamic programming, princeton univercity press. *Princeton, NJ*, 1957.
- [2] Bittanti, S. History and prehistory of the riccati equation. In *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1599–1604, Kobe, Japan, December 1996. IEEE.
- [3] Bittanti, Sergio, Laub, Alan J., and Willems, Jan C. *The Riccati Equation*. Springer-Verlag, New York, NY, 1991.
- [4] Bliss, Gilbert A. Lectures on the calculus of variations. 1946.
- [5] Boltyanskii, Vladimir Grigorevich, Pontryagin, Lev Semenovich, and Gamkrelidze, Revaz Valer'yanovich. On the theory of optimal processes. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR (in Russian)*, volume 110, pages 7–10, 1956.
- [6] Bryson, A.E. Optimal control-1950 to 1985. *Control Systems*, 16(3):26–33, June 1996.
- [7] Gamkrelidze, R. V. Discovery of the maximum principle. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 5(4):437–451, 1999.
- [8] Goldstine, Herman H. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. 1980.
- [9] Kalman, R. E. and Bucy, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(1):95–107, march 1961.
- [10] Kalman, Rudolf Emil. Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5(2):102–119, 1960.
- [11] Kalman, Rudolph Emil. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):34–45, march 1960.
- [12] Leitmann, George. *The Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer US, 1981.
- [13] McShane, E. J. The calculus of variations from the beginning through optimal control theory. *Journal of Control and Optimization*, 27(5):916–939, September 1989.



- [14] Naidu, Desineni Subbaram. *Optimal Control Systems*. CRC Press, oct 2002.
- [15] Pontryagin, LS, Boltyanskii, VG, Gamkrelidze, RV, and Mishchenko, EF. The mathematical theory of optimal processes, 1962.
- [16] Riccati, C. Jacobo. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus. *Acta Eruditorum Lipsiae*, 8:23–67, 1724.
- [17] Sussmann, H.J. and Willems, J.C. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *Control Systems Magazine*, 17(3):32–44, June 1997.
- [18] Wiener, Norbert. *Cybernetics*. 1948.
- [19] Wiener, Norbert. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. The MIT Press, 1964.

Abstract

yes

Keywords:



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of
the Requirement for the Degree of Doctor
of Philosophy in

Supervisor:

Advisor: