B۰۶۶A"۰۶۶"۹F۰۶"۸F۰۶"۷F۰۶"۶F۰۶"۵F۰۶"۴F۰۶"۳F۰۶"۲F۰۶

**به نام خدا**

**نام فایل:** *ZZZZ* 8_p _27

**استاد: خانم دکتر**

**دانشجو: زهرا**

۱۰ دی ۱۴۰۱

در آن صورت $Z_1$ و $Z_2$ مستقل اند و دارای **توزیع نرمال استاندارد** هستند.

**اثبات:** نگاشت یک به یک $\Phi : [0,1) \times [0,1) \to R^2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Phi(u_1,u_2) = \Big(\sqrt{-2logu_1}ln2\pi u_2, \sqrt{-2logu_1}sin(2\pi u_2)\Big) = (z_1,z_2)$$

توجه داریم $z_1^2 + z_2^2 = -2logu_1$ . چون ژاکوبی $\Phi$ توسط

$$J_\Phi = det\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-2logu_1}}\frac{ln2\pi u_2}{u_1} & \sqrt{-2logu_1}(-2\pi sin(2\pi u_2)) \\ -\frac{1}{\sqrt{-2logu_1}}\frac{sin2\pi u_2}{u_1} & \sqrt{-2logu_1}(-2\pi cos(2\pi u_2)) \end{bmatrix} = \frac{-2\pi}{u_1}$$

داده می شود، داریم برای $A \subset [0,1) \times [0,1)$ ،

$$\begin{aligned} \int\int_A f_{u_1,u_2}(u_1,u_2)\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 &= Pr\Big((u_1,u_2) \in A\Big) \\ &= Pr\Big((z_1,z_2) \in \Phi(A)\Big) \\ &= \int\int_{\Phi(A)} f_{z_1,z_2}(z_1,z_2)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2 \\ &= \int\int_A f_{z_1,z_2}\big(\Phi(u_1,u_2)\big)|J_\Phi|\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 \\ &= \int\int_A f_{z_1,z_2}\big(\Phi(u_1,u_2)\big)\frac{2\pi}{u_1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 \end{aligned}$$

چون چگالی احتمال توأم توسط

$$f_{u_1,u_2}(u_1,u_2) = 1, \quad (u_1,u_2) \in [0,1) \times [0,1)$$

داده می شود، داریم

$$f_{z_1,z_2}(z_1,z_2) = \frac{u_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)}$$