فصل اول

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

مشخص کردن ظرفیت شبکه های ارتباطی مهمترین و چالش برانگیزترین مشکل در نظریه اطلاعات شبکه بوده است. اگرچه ، این مشکل تا حد زیادی حل نشده باقی مانده است ، اما ظهور کدگذاری شبکه نوع نگاه ما به شبکه های ارتباطی را تغییر داده است. در واقع، در توصیف ظرفیت شبکه های ارتباطی به دلیل کدگذاری شبکه، موفقیت هایی حاصل شده است. شبکه های فاقد دور جهت داری را در نظر بگیرید که در آن هر مقصد در شبکه نیاز به محاسبه مجموع نمادهای منبع دارد. چنین دسته ای از شبکه ها به عنوان شبکه های مجموع شناخته می شوند. فرض بر این است که همه گره های موجود در شبکه قادر به پیاده سازی کدگذاری شبکه هستند. همچنین فرض بر این است که تمام اتصال های موجود در شبکه اتصال هایی با ظرفیت واحد هستند. برای یک شبکه مجموع که دارای حداکثر دو منبع یا حداکثر دو مقصد است، فرض می کنیم که حداقل برش بین هر منبع و هر مقصد ۱ باشد، ظرفیت کدگذاری شبکه جمع حداقل ۱ است. با توجه به شبکه تک پخشی چندتایی داده شده، می توان یک شبکه مجموع قابل حل ساخت اگر و تنها اگر شبکه تک پخشی چندتایی قابل حل باشد. نتایج مربوط به شبکه های تک پخشی چندگانه برای شبکه های مجموع نیز صادق است، از جمله، عدم کافی بودن کدهای خطی شبکه، برگشت ناپذیری و غیرقابل دسترسی بودن ظرفیت کدگذاری و غیره. تمام شبکه های مجموع گزارش شده فقط دارای ظرفیت کدگذاری گویای معینی هستند. به عنوان مثال، برای یک شبکه مجموع دارای سه منبع و سه مقصد، ظرفیت کدگذاری ۰، $\frac{۲}{۳}$ یا ≤ ۱ است.

۱.۱ شبکه مجموع دارای ظرفیت کدگذاری $\frac{1}{q}$

در این بخش، وجود یک شبکه مجموع را نشان می‌دهیم که ظرفیت شبکه آن برابر با $\frac{1}{q}$ است، که در آن q یک عدد صحیح مثبت است. برای این منظور، ابتدا یک شبکه مجموع می‌سازیم که دارای ظرفیت کدگذاری $\frac{2}{m+1}$ است که در آن m یک عدد صحیح مثبت است. ساخت شبکه G در شکل ؟؟ نشان داده شده است. شبکه G دارای $\binom{m}{1}+\binom{m}{2}$ منبع می‌باشد که به فرم $s_1, s_2, \ldots, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_{m+\binom{m}{2}}$ نمایش داده می‌شوند ، و همچنین دارای $\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+1$ مقصد می‌باشد که به صورت $t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, t_{m+2}, t_{m+3}, \ldots, t_{m+\binom{m}{2}+1}$ نمایش داده می‌شوند.G دارای دو لایه گره میانی است. لایه فوقانی گره‌های میانی با$u_1, u_2, \ldots, u_m$و لایه پایین گره‌های میانی با$v_1, v_2, \ldots, v_m$نمایش داده می‌شوند. قرار می‌دهیم:

$$U = u_1, u_2, \ldots, u_m$$

و

$$V = v_1, v_2, \ldots, v_m.$$

برای هر i، منبع s_i به گره u_i به وسیله یال (s_i, u_i)متصل می‌شود. در میان بقیه منابع $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_{m+\binom{m}{2}}$، هر منبع به دو گره‌ی منحصر به فرد از گره‌های $u_1, u_2, \ldots, u_m$ متصل می‌شود. اگرچه روش‌های مختلفی برای این اتصالات وجود دارد (به طور دقیق $!\binom{m}{2}$)، اتصالات زیر را تعریف می کنیم:
برای$1 \le j \le m-1$ و $i = 1, 2, \ldots, m-j$، گره $s_{\left(\sum_{k=0}^{j-1}(m-k)\right)+i}$ توسط یال های $(s_{\left(\sum_{k=0}^{j-1}(m-k)\right)+i}\ ,\ u_j)$ و $(s_{\left(\sum_{k=0}^{j-1}(m-k)\right)+i}\ ,\ u_{j+i})$ به u_j و u_{j+i} متصل می‌شود. در مورد اتصالات بین منابع و اولین لایه گره‌های میانی، مجموعه منابع زیر را تعریف می‌کنیم. برای $i = 1, 2, \ldots, m$، هر منبع در مجموعه S_i با یک یال به u_i متصل می‌شود:

$$S_1 \ :\ = \left\{s_1, s_{m+1}, s_{m+2}, s_{m+3}, s_{m+4}, \ldots, s_{\sum_{i=0}^{1}(m-i)}\right\},$$

$$S_2 \ :\ = \left\{s_2, s_{m+1}, s_{\left(\sum_{i=0}^{1}(m-i)\right)+1}, s_{\left(\sum_{i=0}^{1}(m-i)\right)+2}, s_{\left(\sum_{i=0}^{1}(m-i)\right)+3}, \ldots, s_{\sum_{i=0}^{1}(m-i)}\right\},$$

$$\vdots$$

$$S_m \ :\ = \left\{s_m, s_{m+1}, s_{\sum_{i=0}^{1}(m-i)}, s_{\sum_{i=0}^{2}(m-i)}, s_{\sum_{i=0}^{3}(m-i)}, \ldots, s_{\binom{m}{2}}\right\}.$$

مجموعه تمام منابع را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$S = \left\{ s_1, s_2, \ldots, s_{m+\binom{m}{2}} \right\}.$$

قبل از ارائه توضیحات بیشتر در مورد شبکه G، برخی از خصوصیات مجموعه های تعریف شده فوق را در لم زیر شرح می دهیم.